Международная конференция
«КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ПРИБЛИЖЕНИЙ», посвященная 90-летней годовщине со дня рождения профессора Е.П. Долженко

Москва, 27–28 сентября 2024

Аннотации докладов

Неравенства для норм производных функций, аналитических в полосе

Р.Р. Акопян

(Институт математики и механики УрО РАН, RRAkopyan@mephi.ru)

Предполагается обсудить неравенства для аналитических функций в полосе, являющиеся аналогами неравенства Колмогорова на прямой, и взаимосвязанную задачу Стечкина наилучшего приближения оператора дифференцирования ограниченными операторами. Основное внимание будет уделено точным неравенствам, оценивающим L^p-норму первой производной на промежуточной прямой через L^p-нормы предельных значений функции на граничных прямых.

Неравенства Е.П. Долженко для производных рациональных и n-листных функций

А.Д. Баранов

(Санкт-Петербургский ун-т, anton.d.baranov@gmail.com)

В 1966 году Е.П. Долженко доказал следующие неравенства для рациональных функций степени не выше n: если G — достаточно регулярная (как минимум, класса C^2) ограниченная область, то для $1 \leqslant p < 2$ найдется константа C, зависящая от области G и от p, такая что для любой рациональной функции R степени не выше n с полюсами вне $\overline{G}$ справедливы оценки

$$\int_G |R'(w)|^p \, dA(w) \leqslant Cn^{p-1} \|R\|^p_{H^\infty(G)}, \qquad p \in (1, 2),$$

$$\int_G |R'(w)| \, dA(w) \leqslant C \ln(n+1) \|R\|_{H^\infty(G)},$$

где $\|R\|_{H^\infty(G)} = \sup_{w \in G} |R(w)|$.

Недавно нами было показано, что условия на область можно существенно ослабить: аналогичные неравенства справедливы для любой конечносвязной области со спрямляемой границей. При этом класс рациональных функций можно заменить на более широкий класс ограниченных n-листных функций. Более того, в случае $p=1$ порядок зависимости от n можно улучшить, а именно, справедливо неравенство с выражением $C\sqrt{\log n}\|R\|_{H^\infty(G)}$ в правой части. Это неравенство уже точное по порядку зависимости от n, а соответствующий рост достигается в случае единичного круга на многочленах или произведениях Бляшке.

Также получены обобщения неравенств Долженко на произвольные односвязные области. В этом случае имеет место степенная оценка сверху в терминах размерности Минковского границы.

Доклад основан на совместной работе с И.Р. Каюмовым.

Гармоническая мера и квазиизометрия

С.Ю. Граф

(Тверской ун-т, Петрозаводский ун-т, Sergey.Graf@tversu.ru)

Рассматриваются диффеоморфизмы единичного круга комплексной плоскости, для которых гармоническая мера граничных дуг круга с разрезами искажается в ограниченное число раз, т.е. является квазиинвариантной. Получены оценки производных отображений данного класса. Доказывается, что подобные отображения являются квазиконформными, а также представляют собой квазиизометрии относительно некоторых конформно инвариантных метрик. Приводятся достаточные условия принадлежности функций данному классу. Доказывается обобщение теоремы Хэймана–Ву на данный класс отображений.

Оценки норм Бесова в круге для конечных произведений Бляшке

И.Р. Каюмов

(Санкт-Петербургский ун-т, ikayumov@gmail.com)

В ходе доклада предполагается описать ряд задач, приводящих к необходимости двусторонних оценок норм Бесова для конечных произведений Бляшке в круге. В частности, будут описаны результаты, полученные совместно с А.Д. Барановым, Р. Заруфом и М. Харцем.

Пористые и σ-пористые множества

С.В. Колесников

(Ивановский ун-т, kolesn66@mail.ru)

Предполагается дать обзор некоторых результатов, использующих понятие пористого множества, введенное Е.П. Долженко.

Об обратных неравенствах Маркова–Никольского для полиномов с нулями на отрезке

М.А. Комаров

(Владимирский ун-т, kami9@yandex.ru)

Для алгебраических полиномов, все нули которых лежат на единичном отрезке, хорошо известно неравенство П. Турана, доставляющее оценку снизу максимума модуля производной многочлена на отрезке через степень и максимум модуля самого многочлена (эту оценку можно рассматривать как обращение классического неравенства А.А. Маркова). Неравенство Турана обобщалось и на случай интегральных пространств. Наиболее общий результат в этом направлении был получен С. Чжоу, установившим точную по порядку оценку снизу L_p-нормы производной многочлена с нулями на отрезке через степень и L_q-норму самого многочлена (обращение неравенства Маркова–Никольского) при определённых соотношениях между показателями p и q. Доклад посвящён построению неравенства разных метрик типа Турана в одном из случаев, не исследованных Чжоу. Доказательство использует метрические оценки наипростейших дробей (логарифмических производных полиномов).

О неравенствах типа Бернштейна и Смирнова для многочленов

Е.Г. Компанеец

(Петрозаводский ун-т, g_ek@inbox.ru)

Отправной точкой в теории дифференциальных неравенств для многочленов является книга Д.И. Менделеева «Исследование водных растворов по удельному весу», 1887. В этой работе он касался не только химических, но также и математическими проблем. Вопрос, поднятый в этой книге, привел к появлению большого количества работ по различным видам дифференциальных неравенств для многочленов. В докладе будут представлены неравенства типа неравенств В.И. Смирнова и С.Н. Бернштейна, в которых используются коэффициенты при старших степенях и свободные члены полиномов. Полученные неравенства дополняют и уточняют известные ранее результаты.

О некоторых обобщениях операторов Бернштейна

А.Л. Лукашов

(МФТИ, alexey.lukashov@gmail.com)

Предполагается обсудить обобщения классических полиномов Бернштейна такие, как рациональные функции Виденского, полиномиальные операторы Сабадоша на нескольких отрезках и их дальнейшее развитие. Проведен анализ их аппроксимационных свойств, наличие интерполяционных условий, сложность построения.

О емкостях, соизмеримых с гармоническими

М.Я. Мазалов

(НИУ МЭИ, Смоленский филиал, maksimmazalov@yandex.ru)

Пусть L — однородный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка с постоянными комплексными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ (в $\mathbb{R}^2$ — сильно эллиптический оператор). В терминах емкостей γ_L описываются устранимые особенности L^∞-ограниченных решений уравнений $Lf = 0$. Установлена соизмеримость емкостей γ_L с классическими гармоническими емкостями теории потенциала. В доказательстве используются точный вид фундаментальных решений операторов L, полученный недавно П.В. Парамоновым и К.Ю. Федоровским, и некоторые идеи Х. Толсы, с помощью которых была установлена соизмеримость аналитических емкостей γ и γ_+. Как следствие, критерий равномерной приближаемости функций решениями уравнений $Lf = 0$, представляющий собой естественный аналог критерия А.Г. Витушкина, формулируется в терминах гармонических емкостей.

Равномерная рациональная аппроксимация четного и нечетного преобразования Коши

Т.С. Мардвилко

(Белорусский государственный ун-т, mardvilko@mail.ru)

В докладе будет представлена слабая асимптотика наилучших равномерных рациональных приближений четного и нечетного преобразования Коши. Также будут показаны некоторые приложения полученных результатов, в частности, к нахождению слабой асимптотики наилучших равномерных рациональных приближений нечетного продолжения на $[-1, 1]$ степенной функции.

О конформных отображениях неограниченных многоугольников

С.Р. Насыров

(Казанский ун-т, semen.nasyrov@yandex.ru)

При нахождении отображении верхней полуплоскости на многоугольник, содержащий внутри себя бесконечно удаленную точку, возникает задача об определении не только прообразов вершин, но и полюса отображающей функции. Если зафиксировать прообразы вершин, то для нахождения полюса имеется уравнение, которое имеет вид $F(z) = 0$, где F — это некоторая бианалитическая функция. В докладе обсуждаются вопросы о единственности решения этого уравнения в верхней полуплоскости для некоторых классов многоугольных областей, а также его связь с внешними обратными краевыми задачами для аналитических функций.

О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышева

П.Г. Поцейко, Е.А. Ровба

(Гродненский ун-т, paha-mat@yandex.ru)

Рассматриваются аппроксимации на отрезке $[-1,1]$ сингулярных интегралов вида

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \qquad x \in [-1,1],$$

двумя рациональными интегральными операторами, в некотором смысле связанными между собой. Первый из них — интегральный оператор Фурье–Чебышева, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышева–Маркова. Второй оператор является его образом при преобразовании изучаемым сингулярным интегралом.

Изучаются аппроксимационные свойства соответствующих полиномиальных аналогов обоих операторов в случае, когда плотность сингулярного интеграла удовлетворяет на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица порядка $\alpha \in (0,1]$.

Исследуются рациональные аппроксимации на отрезке $[-1,1]$ сингулярного интеграла с плотностью, имеющей степенную особенность, в случае, когда аппроксимирующие рациональные функции имеют фиксированное количество геометрически различных полюсов и в случае, когда полюсы представляют собой некоторые модификации "ньюменовских" параметров.

О гладких рациональных сплайн-функциях двух переменных

А.-Р.К. Рамазанов

(Дагестанский ун-т, ar-ramazanov@rambler.ru)

По дискретным данным на произвольной прямоугольной сетке узлов из данного прямоугольника $[a,b] \times [c,d]$ построены рациональные сплайн-функции двух переменных, которые имеют непрерывные частные и смешанные производные до наперед заданного порядка в некотором (более широком) прямоугольнике $[a-\delta, b+\delta] \times [c-\delta, d+\delta]$. Изучены их аппроксимативные свойства для функций, кратно непрерывно дифференцируемых на прямоугольнике $[a,b] \times [c,d]$.

Об одном условии дифференцируемости функций

Е.А. Севастьянов

(sevastianov.e.a@mail.ru)

В ДАН СССР (1976, т.230, № 4) Е.П. Долженко анонсировал следующий результат: если для функции, определенной на отрезке, сходится ряд из ее наименьших уклонений в метрике Хаусдорфа от кусочно-монотонных функций порядка n, то эта функция почти всюду на отрезке дифференцируема. Публикации доказательства этого утверждения не последовало.

Доклад об истории вопроса и доказательстве анонсированного результата.

Экстремальные задачи на классах голоморфных отображений круга в себя с несколькими неподвижными точками

А.П. Солодов

(мехмат МГУ, apsolodov@mail.ru)

В динамике голоморфного отображения важную роль играют неподвижные точки. В случае голоморфного отображения единичного круга в себя все неподвижные точки, за исключением, быть может, одной, расположены на границе единичного круга. При этом, как оказалось, наличие угловых производных и их значения в граничных неподвижных точках существенно влияют на поведение самого отображения и его итераций. Кроме того, некоторые классические задачи геометрической теории функций комплексного переменного получают новые постановки и формулировки. Этим вопросам посвящен настоящий доклад. В частности, будут представлены результаты, связанные с точными областями однолистности и покрытия голоморфных функций.

О дифференциальных неравенствах для многочленов

В.В. Старков

(Петрозаводский ун-т, vstarv@list.ru)

В 1887 г. знаменитый химик Д.И. Менделеев в связи со своими научными исследованиями поставил задачу о вещественных многочленах. Это не только привело к решению поставленной задачи, но и к появлению нового направления в теории функций. Из ряда результатов, появившихся в этом направлении к 1930 г., особое значение придают теореме С.Н. Бернштейна: пусть f и F — комплексные многочлены, для которых 1) $\deg f \leqslant \deg F$; 2) все нули многочлена F лежат в замыкании круга $E = \{|z| < 1\}$; 3) $|f(z)| \leqslant |F(z)|$ при $|z| = 1$. Тогда $|f'(z)| \leqslant |F'(z)|$ во внешности круга E. В огромном количестве работ, появившихся после 1930 г. и связанных с этой теоремой, обычно оставались неизменными условия 1), 2) теоремы. Вопрос: если убрать эти ограничения 1) и 2), как это отразится на заключительном неравенстве $|f'(z)| \leqslant |F'(z)|$ теоремы Бернштейна и многих ее модификаций, обобщений, следствий и т.д.? Об этом речь в докладе.

О существовании аппроксимаций Паде–Чебышева аналитических функций

А.П. Старовойтов

(Гомельский ун-т, svoitov@gsu.by)

Получены достаточные условия существования линейных и нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышева первого и второго рода аналитических функций, описан явный вид таких аппроксимаций.

Об исключительных множествах в теореме Грина

Д.С. Теляковский

(МИФИ, dtelyakov@mail.ru)

Пусть область $G \subset \mathbb{R}^2$ и функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ определены в $\overline{G}$. Согласно теореме Грина, если G, $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ достаточно хорошие, то справедлива формула

$$\int_{\partial G^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Р. Феск показал, что условия, при которых верна формула Грина, можно ослабить: и непрерывность функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, и существование у них частных производных первого порядка можно не предполагать на исключительном множестве, которое является счетным объединением замкнутых множеств E_j, маленьких в некотором смысле.

Нами показано, если на E_j функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ имеют выпуклый вверх модуль непрерывности $\omega_j(t)$, то формула Грина справедлива, если $H_{t\omega_j(t)}(E_j) = 0$. Это дает более точную характеристику условий, при которых верна теорема Грина, чем теорема Р. Феска.

Неванлинновские области

К.Ю. Федоровский

(мехмат МГУ, kfedorovs@yandex.ru)

Обзорный доклад о свойствах и приложениях неванлинновских областей, введенных автором в 1996 г.